
GTIIT

线代精简笔记

第1讲 行列式

1、本质定义（几何意义）（第一种定义）

$|D| \neq 0$，线性无关

$|D| = 0$，线性相关

2、性质

① 行列互换，值不变 $|A| = |A^T|$

② 若行列式中某行（列）元素全为0，则行列式为0

③ 若行列式中某行（列）元素有公因子k，则k可提到行列式外面

④ 行列式中某行（列）元素均是两个元素之和，则可拆成两个行列式之和

⑤ 行列式中两行（列）互换，行列式的值反号

⑥ 行列式中两行（列）元素相等或对应成比例，则行列式为0

⑦ 行列式中某行（列）的k倍加到另一行（列），行列式的值不变

3、行列式的逆序数法定义（第二种定义）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_1} \cdots a_{nj_n}.$$

4. 行列式的展开定理（第三种定义）

(1) 余子式 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

去掉 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列元素所剩下的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

(2) 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

余子式乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式

(3) 行列式按某一行(列)展开的展开公式 (元素为0的越多越好)

① 行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和。

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & (i=1,2,\cdots,n) \text{ 某一行元素与其 } A_{ij} \text{ 相乘} \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & (j=1,2,\cdots,n) \text{ 某一列元素与其 } A_{ij} \text{ 相乘} \end{cases}$$

② 行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和，结果为0

$$\begin{cases} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 & i \neq k \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 & j \neq k \end{cases}$$

5、n个重要的行列式

(1) 主对角线行列式 (3个)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \cdots & a_{22} & a_{23} \\ \cdots & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

(2) 副对角线行列式 (3个)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a_{13} \\ \cdots & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a_{13} \\ \cdots & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{13}a_{22}a_{31} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

(3) 拉普拉斯展开式 (4个)

设A为m阶矩阵，B为n阶矩阵，则：

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \cdot |A||B|$$

(4) 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

6、具体型行列式的计算

① 直接展开 { 1° 某行(列)有尽可能多的0
2° 阶数不高的情况

② 爪形 

用斜爪子消去平(竖)爪子

③ 异爪型 { 1° 阶数不高直接展开
2° 递推法

④ 行(列)和相等

所有列(行)相加，提公因式

⑤ 消零化基本型 (主对角3个+副对角3个)

⑥ 拉普拉斯展开式

⑦ 范德蒙德行列式 (化为范德蒙德行列式，盯着第2行写结果)

7、ab型

① a在正对角线上

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

② a在副对角线上

$$G_n=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

8、线性组合表示成矩阵乘积的形式

如 $a_2-3a_3=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix}$

$2a_1+2a_2-5a_3=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix}2\\2\\-5\end{bmatrix}$

1

$$D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&1-a&b&0\\0&-1&1-b&c\\0&0&-1&1-c\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{逐行相加}}\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&1-a&b&0\\0&-1&1-b&c\\0&0&-1&1-c\end{vmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_2}}\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&b&0\\0&0&1&c\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

2

求行列式：$D=\begin{vmatrix}a+x&a&a&a\\a&a+x&a&a\\a&a&a+x&a\\a&a&a&a+x\end{vmatrix}$

分析一：每行加到某一行

$$D=(4a+x)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&a+x&a&a\\a&a&a+x&a\\a&a&a&a+x\end{vmatrix}\xrightarrow[r_4-ar_1]{\substack{r_2-ar_1\\r_3-ar_1}}(4a+x)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(4a+x)x^3$$

分析二：某一行的(-1)倍分别加到其它各行

$$D\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}a+x&a&a&a\\-x&x&0&0\\-x&0&x&0\\-x&0&0&x\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{每一列都加到第一列}}\begin{vmatrix}4a+x&a&a&a\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(4a+x)x^3$$

分析三 = 上一行的(-1)倍分别加到下一行

$$D \overset{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2\\ r_2-r_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = (4a+x)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= (4a+x)x^3$$

注：只有二阶、三阶行列式可以主对角线减副对角线计算，四阶行列式不可以，要用展开公式

补充克莱默法则

引子：$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 如果系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 则方程组有唯一解.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

定义：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_3 \end{cases}$ 如果系数行列式 $D = |A| \neq 0$，则方程组有唯一解.

且 $x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$ ⋯，$x_n = \frac{D_n}{D}$

⇒ 推论1：若齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 的系数行列式不为0，则方程组只有一组零解.

即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

⇒ 推论1：若齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ 有非零解，则它的系数行列式必为0

第2讲 矩阵

1、矩阵的加法和数乘运算规律

① 交换律：$A+B=B+A$

② 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$

③ 分配律：$k(A+B)=kA+kB$，$(k+l)A=kA+lA$

④ 数和矩阵相乘的结合律：$k(lA)=(kl)A=l(kA)$

注：$|kA|=k^n|A| \neq k|A|$

$|A+B| \neq |A|+|B|$

$A \neq O \not\Rightarrow |A| \neq 0$

$A \neq B \not\Rightarrow |A| \neq |B|$

2、矩阵的乘法运算规律

① 结合律：$(AB)C=A(BC)$

② 分配律：$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

③ 数乘与矩阵乘积的结合律：$(kA)B=A(kB)=k(AB)$

注：1. 不满足交换律 $AB \neq BA$

2. 不满足消去律 $AB=AC \Rightarrow A(B-C)=0 \not\Rightarrow B=C$

$AB=0 \not\Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

3、转置矩阵的运算规律

① $(A^T)^T=A$

② $(kA)^T=kA^T$

③ $(A+B)^T=A^T+B^T$

④ $(AB)^T=B^TA^T$

⑤ $m=n$ 时，$|A^T|=|A|$

4、向量的内积与正交

(1) 内积 (α,β) = 设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots a_n]^T$，$\beta=[b_1,b_2,\cdots b_n]$，则

$\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为 α,β 内积，记为 (α,β)

(2) 正交：当 $\alpha^T\beta=0$ 时，称 α,β 为正交向量

☆ 标准正交基 $a_i^Ta_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

☆ 施密特正交化（正交规范化）公式

① $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1$，$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2\ \beta_2)}\beta$

得到 β_1,β_2,β_3 是正交向量组

② 将 β_1,β_2,β_3 单位化

$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$，$\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$，$\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是标准正交向量组

5、n种重要矩阵

① 零矩阵：所有元素都为0

② 单位矩阵 E：主对角元素为1，其余为0　$AE=EA$

③ 数量矩阵：数k与单位矩阵的乘积　$A\cdot(kE)=(kE)\cdot A$

④ 对角矩阵：非主对角元素均为0

⑤ 上(下)三角矩阵

⑥ 对称矩阵：满足 $A^T=A\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$　如 $\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&0&4\\-1&4&5\end{pmatrix}$

⑦ 反对称矩阵：满足 $A^T=-A\Leftrightarrow\begin{cases}a_{ij}=-a_{ji},\ i\neq j\\ a_{ii}=0\end{cases}$　如 $\begin{pmatrix}0&2&-3\\-2&0&1\\3&-1&0\end{pmatrix}$

⑧ 正交矩阵：满足 $A^TA=E$

6、矩阵的逆定义

若 $AB=BA=E$，则A和B互为逆矩阵

$\Rightarrow A^{-1}=B \quad B^{-1}=A$

7、A可逆的充要条件：$|A|\neq 0$，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$

8、逆矩阵的性质

① $(A^{-1})^{-1}=A$

② $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

④ $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

⑤ $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

9、用定义法求逆矩阵的方法

法一：由 $AB=E$ 得 $A^{-1}=B$

法二：$A^{-1}=(BC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

法三：

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

主对角分块矩阵

主对角位置不变加逆

副对角位置不变且左乘同行右乘同列加负号

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

副对角分块矩阵

副对角位置交换加逆

主对角位置交换且左乘同行右乘同列加负号

10、伴随矩阵定义

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

注：① 正负号

② $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$ 的顺序

且有 $AA^* = A^*A = |A|E$

$\Rightarrow$ 狗狗* = 狗*狗 = |狗|E

11、伴随矩阵的性质

① $AA^* = A^*A = |A|E$

② $|A^*| = |A|^{n-1}$

③ $A^* = |A|A^{-1}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

⑤ $A = |A|(A^*)^{-1}$

⑥ $(kA)(kA)^* = |kA|E$

⑦ $A^T(A^T)^* = |A^T|E$

⑧ $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$

⑨ $A^*(A^*)^* = |A^*|E$

⑩ $(A^T)^* = (A^*)^T$

⑪ $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

⑫ $(AB)^* = B^*A^*$

⑬ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

12、初等变换

① 倍乘：一个非零常数乘矩阵的某一行(列)

② 互换：互换矩阵中某两行(列)的位置.

③ 倍加：将矩阵的某一行(列)的k倍加到另一行(列)

13、初等矩阵的定义：由单位矩阵经过一次初等变换的矩阵称为初等矩阵

(1) 倍乘初等矩阵：$E_2(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，E的第2行(或第2列)乘k

(2) 互换初等矩阵：$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，E的第1,2行(或1,2列)互换

(3) 倍加初等矩阵：$E_{31}(k)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{bmatrix}$ E的第1行的k倍加到第3行(或第3列的k倍加到第1列)

14、初等矩阵的性质

① 初等矩阵的转置仍是初等矩阵

$$E_i^T(k)=E_i(k) \qquad E_{ij}^T=E_{ij} \qquad E_{ij}^T(k)=E_{ij}(k)$$

② 初等矩阵都是可逆矩阵

$$[E_i(k)]^{-1}=E_i(\tfrac{1}{k}) \qquad E_{ij}^{-1}=E_{ij} \qquad [E_{ij}(k)]^{-1}=E_{ij}(-k)$$

③ 若A为可逆矩阵，则A一定可通过若干(有限)次初等行变换化为同阶单位矩阵E，即$P_s\cdots P_2P_1A=E$

④ 左行右列变化

对n阶矩阵A进行初等行变换，相当于矩阵A左乘相应的初等矩阵

对n阶矩阵A进行初等列变换，相当于矩阵A右乘相应的初等矩阵

如：$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

则 $E_{12}A=\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}$ 左乘行变换　　$AE_{12}=\begin{pmatrix}-1&1\\3&2\end{pmatrix}$ 右乘列变换

15、用初等变换法求逆矩阵的方法

$$[A \mid E] = [E \mid A^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

16、等价矩阵 $\Leftrightarrow$ $r(A) = r(B)$

17、矩阵的秩定义

△ 设A是$m \times n$矩阵，若存在k阶子式不为0，而任意$k+1$阶子式全为0，则 $r(A) = k$

△ 若A是$n \times n$矩阵，则 $r(A_{n \times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆

18、矩阵的秩的性质

(1) 初等变换不改变矩阵的秩

(2) 设A是$m \times n$矩阵，B是满足有关矩阵运算要求的矩阵，则

① $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$

② $r(kA) = r(A) \quad (k \neq 0)$

③ $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

④ $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

⑤ $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$，其中A为n阶方阵

⑥ $r(A^T) = r(A)$

⑦ 如果P、Q可逆，则 $r(PAQ) = r(A)$，$r(PA) = r(A)$，$r(AQ) = r(A)$

⑧ 如果$A_{m \times n}$，$B_{n \times s}$，$AB = 0$，则 $r(A) + r(B)$

⑨ $r\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$

⑩ 如A和B相似 $A \sim B$

$r(A) = r(B)$，$r(A+kE) = r(B+kE)$

⑪ $r(A) = A$的列秩 $= A$的行秩