



线代精简笔记

第1讲 行列式

1. 本质定义 (几何定义) (第一种定义)

$|D| \neq 0$, 线性无关

$|D| = 0$, 线性相关

2. 性质

① 行列互换, 值不变 $|A| = |A^T|$

② 若行列式中某行(列)元素全为0, 则行列式为0

③ 若行列式中某行(列)元素有公因子 k , 则 k 可提到行列式外面

④ 行列式中某行(列)元素均是两个元素之和, 则可拆成两个行列式之和

⑤ 行列式中两行(列)互换, 行列式的值反号

⑥ 行列式中两行(列)元素相等或对应成比例, 则行列式为0

⑦ 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列), 行列式的值不变

3. 行列式的逆序数法定义 (第二种定义)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$



4. 行列式的展开定理 (第三种定义)

(1) 余子式 $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

去掉 a_{ij} 所在的第 i 行, 第 j 列元素所剩下的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。

(2) 代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

余子式乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式

(3) 行列式按某一行(列)展开的展开公式 (元素为0的越多越好)

① 行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和。

$$|A| = \begin{cases} a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} & (i=1, 2, \dots, n) \text{ 某一行元素与其 } A_{ij} \text{ 相乘} \\ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij} & (j=1, 2, \dots, n) \text{ 某一列元素与其 } A_{ij} \text{ 相乘} \end{cases}$$

② 行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和, 结果为0

$$\begin{cases} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0 & i \neq k \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0 & j \neq k \end{cases}$$

5. 几个重要的行列式

(1) 主对角线行列式 (3个)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \dots & a_{22} & a_{23} \\ \dots & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

(2) 副对角线行列式 (3个)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & a_{13} \\ \dots & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & a_{13} \\ \dots & a_{22} & \dots \\ a_{31} & \dots & \dots \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{13}a_{22}a_{31} = -a_{13}a_{22}a_{31}$$

(3) 拉普拉斯展开式 (6个)

设 A 为 m 阶矩阵, B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \cdot |A||B|$$

(4) 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

6. 具体型行列式的计算

① 直接展开 $\begin{cases} 1^\circ \text{ 某行(列)有尽可能多的 } 0 \\ 2^\circ \text{ 阶数不高的情况} \end{cases}$

② 爪形 $\begin{matrix} \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup \end{matrix}$

用斜爪子消去平(竖)爪子

③ 异爪型 $\begin{cases} 1^\circ \text{ 阶数不高直接展开} \\ 2^\circ \text{ 递推法} \end{cases}$

④ 行(列)和相等

所有列(行)相加, 提公因式

⑤ 消零化基本型 (主对角3个+副对角3个)

⑥ 拉普拉斯展开式

⑦ 范德蒙德行列式 (化为范德蒙德行列式, 盯着第2行写结果)

7. ab 型

① a 在正对角线上

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}$$

② a 在副对角线上

$$G_n = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [a + (n-1)b] (a-b)^{n-1}$$

8. 线性组合表示成矩阵乘积的形式

$$\text{如 } a_2 - 3a_3 = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$2a_1 + 2a_2 - 5a_3 = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & b & 0 \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{逐行相加}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & b & 0 \\ 0 & -1 & 1-b & c \\ 0 & 0 & -1 & 1-c \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3+r_2 \\ r_4+r_3}} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2

$$\text{求行列式: } D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}$$

分析一 = 每行加到某一行

$$D = (4a+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-ar_1 \\ r_3-ar_1 \\ r_4-ar_1}} (4a+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

分析二 = 某一行的(-1)倍分别加到其它各行

$$D \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}} \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每一列都加到第一列}} \begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

分析三 = 上一行的 (-1) 倍分别加到下一行

$$D = \begin{vmatrix} r_4 - r_3 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - r_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2+C_3+C_4} \begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = (4a+x) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

注: 只有二阶、三阶行列式可以主对角线减副对角线计算, 四阶行列式不可以, 要用展开公式

补充克莱默法则

引子: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 如果系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 则方程组有唯一解.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

定义: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ 如果系数行列式 $D = |A| \neq 0$, 则方程组有唯一解.

$$\text{且 } x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

⇒ 推论1: 若齐次方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$
 的系数行列式不为0, 则方程组只有一组零解, 即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

⇒ 推论1: 若齐次方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 则它的系数行列式必为0

1. 矩阵的加法和数乘运算规律

① 交换律: $A+B=B+A$

② 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ 分配律: $k(A+B)=kA+kB$, $(k+l)A=kA+lA$

④ 数和矩阵相乘的结合律: $k(lA)=(kl)A=l(kA)$

注: $|kA|=k^n|A| \neq k|A|$

$|A+B| \neq |A|+|B|$

$A \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$

$A \neq B \Rightarrow |A| \neq |B|$

2. 矩阵的乘法运算规律

① 结合律: $(AB)C=A(BC)$

② 分配律: $A(B+C)=AB+AC$
 $(A+B)C=AC+BC$

③ 数乘与矩阵乘积的结合律: $(kA)B=A(kB)=k(AB)$

注: 1. 不满足交换律 $AB \neq BA$

2. 不满足消去律 $AB=AC \Rightarrow A(B-C)=0 \Rightarrow B=C$
 $AB=0 \Rightarrow A=0$ 或 $B=0$

3. 转置矩阵的运算规律

① $(A^T)^T=A$

② $(kA)^T=kA^T$

③ $(A+B)^T=A^T+B^T$

④ $(AB)^T=B^TA^T$

⑤ $m=n$ 时, $|A^T|=|A|$

4. 向量的内积与正交

(1) 内积 (α, β) : 设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, 则

$$\alpha^T \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \text{ 为 } \alpha, \beta \text{ 内积, 记为 } (\alpha, \beta)$$

(2) 正交: 当 $\alpha^T \beta = 0$ 时, 称 α, β 为正交向量

★ 标准正交基 $a_i^T a_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

★ 施密特正交化 (正交规范化) 公式

$$\textcircled{1} \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1, \quad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

得到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是正交向量组

② 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化

$$r_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \quad r_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}, \quad r_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

则 r_1, r_2, r_3 是标准正交向量组

5. 几种重要矩阵

① 零矩阵: 所有元素都为 0

② 单位矩阵 E : 主对角元素为 1, 其余为 0 $AE = EA$

③ 数量矩阵: 数 k 与单位矩阵的乘积 $A \cdot (kE) = (kE) \cdot A$

④ 对角矩阵: 非主对角元素均为 0

⑤ 上(下)三角矩阵

⑥ 对称矩阵: 满足 $A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ 如 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

⑦ 反对称矩阵: 满足 $A^T = -A \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = -a_{ji}, & i \neq j \\ a_{ii} = 0 \end{cases}$ 如 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

⑧ 正交矩阵: 满足 $A^T A = E$

6. 矩阵的逆定义

若 $AB=BA=E$, 则 A 和 B 互为逆矩阵

$$\Rightarrow A^{-1}=B \quad B^{-1}=A$$

7. A 可逆的充要条件: $|A| \neq 0$, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

8. 逆矩阵的性质

$$\textcircled{1} (A^{-1})^{-1} = A$$

$$\textcircled{2} (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$\textcircled{3} (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$\textcircled{4} (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$\textcircled{5} |A^{-1}| = |A|^{-1}$$

9. 用定义法求逆矩阵的方法

法一: 由 $AB=E$ 得 $A^{-1}=B$

法二: $A^{-1} = (BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$

$$\text{法三: } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

主对角分块矩阵

主对角位置不变加逆

副对角位置不变且左乘同行右乘同列加负号

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}$$

副对角分块矩阵

副对角位置交换加逆

主对角位置交换且左乘同行右乘同列加负号

10. 伴随矩阵定义

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

注: ① 正负号

② $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$ 的顺序

且有 $AA^* = A^*A = |A|E$

$\Rightarrow$ 狗狗 $^* =$ 狗 * 狗 = |狗|E

11. 伴随矩阵的性质

① $AA^* = A^*A = |A|E$

② $|A^*| = |A|^{n-1}$

③ $A^* = |A|A^{-1}$

④ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$

⑤ $A = |A|(A^*)^{-1}$

⑥ $(kA)(kA)^* = |kA|E$

⑦ $A^T(A^T)^* = |A^T|E$

⑧ $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$

⑨ $A^*(A^*)^* = |A^*|E$

⑩ $(A^T)^* = (A^*)^T$

⑪ $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

⑫ $(AB)^* = B^*A^*$

⑬ $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

12. 初等变换

- ① 倍乘: 一个非零常数乘矩阵的某一行(列)
- ② 互换: 互换矩阵中某两行(列)的位置.
- ③ 倍加: 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)

13. 初等矩阵的定义: 由单位矩阵经过一次初等变换的矩阵称为初等矩阵

(1) 倍乘初等矩阵: $E_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, E 的第2行(或第2列)乘 k

(2) 互换初等矩阵: $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, E 的第1,2行(或1,2列)互换

(3) 倍加初等矩阵: $E_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$ E 的第1行的 k 倍加到第3行(或第3列的 k 倍加到第1列)

14. 初等矩阵的性质

- ① 初等矩阵的转置仍是初等矩阵

$$E_i^T(k) = E_i(k) \quad E_{ij}^T = E_{ij} \quad E_{ij}^T(k) = E_{ij}(k)$$

- ② 初等矩阵都是可逆矩阵

$$[E_i(k)]^{-1} = E_i(1/k) \quad E_{ij}^{-1} = E_{ij} \quad [E_{ij}(k)]^{-1} = E_{ij}(1/k)$$

- ③ 若 A 为可逆矩阵, 则 A 一定可通过若干(有限)次初等行变换化为同阶单位矩阵 E , 即 $P_3 \cdots P_2 P_1 A = E$

- ④ 左行右列变换

对 n 阶矩阵 A 进行初等行变换, 相当于矩阵 A 左乘相应的初等矩阵

对 n 阶矩阵 A 进行初等列变换, 相当于矩阵 A 右乘相应的初等矩阵

如: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

则 $E_{12}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 左乘行变换

$AE_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 右乘列变换

$$[A | E] = [E | A^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

16、等价矩阵 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$

17、矩阵的秩定义

△ 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若存在 k 阶子式不为 0, 而任意 $k+1$ 阶子式全为 0, 则 $r(A) = k$

△ 若 A 是 $n \times n$ 矩阵, 则 $r(A_{n \times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

18、矩阵的秩的性质

(1) 初等变换不改变矩阵的秩

(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

$$① \quad 0 \leq r(A) \leq \min \{m, n\}$$

$$② \quad r(kA) = r(A) \quad (k \neq 0)$$

$$③ \quad r(AB) \leq \min \{r(A), r(B)\}$$

$$④ \quad r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

$$⑤ \quad r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}, \text{ 其中 } A \text{ 为 } n \text{ 阶方阵}$$

$$⑥ \quad r(A^T) = r(A)$$

$$⑦ \quad \text{如果 } P, Q \text{ 可逆, 则 } r(PAQ) = r(A), r(PA) = r(A), r(AQ) = r(A)$$

$$⑧ \quad \text{如果 } A_{m \times n}, B_{n \times s}, AB=O, \text{ 则 } r(A) + r(B)$$

$$⑨ \quad r \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A) + r(B)$$

$$⑩ \quad \text{如 } A \text{ 和 } B \text{ 相似 } A \sim B$$

$$r(A) = r(B), \quad r(A+kE) = r(B+kE)$$

$$⑪ \quad r(A) = A \text{ 的列秩} = A \text{ 的行秩}$$