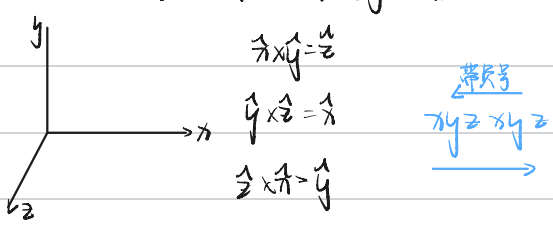
一、向量积

1) 点乘 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=$ 标量，$\alpha=\vec{a}$与$\vec{b}$夹角

$$\cos\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}$$

2) 叉乘 $\vec{a}\times\vec{b}=|a||b|\sin\alpha=$ 矢量　方向：右手定则，从$\vec{a}$指到$\vec{b}$，右手拇指的方向的

Remark：选定x轴方向后，一般用右手定则确定y、z轴正方向，此时有：



二、极坐标下的圆周运动

1) $\omega=\frac{d\theta}{dt}$，$\theta(t)=\theta_0+\int\omega dt$

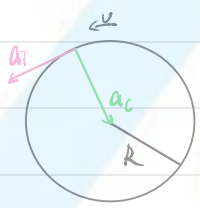
$\alpha=\frac{d\omega}{dt}$，$\omega(t)=\omega_0+\int\alpha dt$

若α恒定，则有

$\omega(t)=\omega_0+\alpha t$

$\theta(t)=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

2) $S=\theta R$ $\xrightarrow{\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(\theta R)}$ $v=$ Linear velocity $=\omega R$ $\xrightarrow{\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega R)}$ $a_T=$ tangential acceleration $=\alpha R$

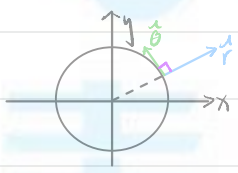


Remark：弧度制无单位，角度制有

E.g. $\sin(Ct)$，$C=5s^{-1}\Rightarrow Ct$无单位$\Rightarrow$弧度制角

$\sin(16.5°)\cdot t\Rightarrow$单位$=s\Rightarrow$角度制角

三、极坐标和单位向量



$\hat{r}\perp\hat{\theta}$

1) $\hat{r}=\cos\theta(t)\hat{x}+\sin\theta(t)\hat{y}$

$\hat{\theta}=-\sin\theta(t)\hat{x}+\cos\theta(t)\hat{y}$

2) $\vec{v}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\dot{r}$：radial velocity　$r\dot{\theta}$：tangential velocity

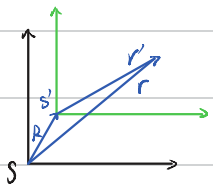
$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

$-r\dot{\theta}^2\hat{r}=$ centripital acceleration

$r\ddot{\theta}\hat{\theta}=$ tangential acceleration

$\ddot{r}\hat{r}=$ radial acceleration = changes the radial velocity $\dot{r}\hat{r}$

四、惯性系和非惯性系



$\vec{r}=\vec{R}+\vec{r}'$ $\xrightarrow{\text{Derivative}}$ $\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}'$ $\xrightarrow{\text{Derivative}}$ $\vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{a}'$

$\longrightarrow\vec{F}_{(S)}=m\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{F}_{(S')}$；Denote $F_{fict}=-m\frac{du}{dt}$

1) 简单题靠想象

2) 难题：Step 1：Draw a table　Step 2：Find the easiest solution　Step 3：Do the transformation

五、功、非保守力

1) 一阶导型：

$f'(x)=-\alpha f(x)\longrightarrow f(x)=Ae^{-\alpha t}$

$f'(x)=-\alpha f(x)+\beta\longrightarrow f(x)=Ae^{-\alpha t}+\frac{\beta}{\alpha}$

2) 二阶导型

$f''(x)=-\alpha f(x)\longrightarrow f(x)=A\sin(\omega t+\varphi)$，$\omega=\sqrt{\alpha}$（$=\sqrt{\frac{k}{m}}$）在弹簧振子中

3) 二次型：$-bv^2=ma=m\frac{dv}{dt}$，v, t分别放两侧，再分别积分

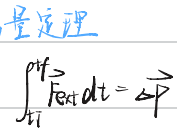
4) $W=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}\vec{F}d\vec{r}=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)$

六、保守力和势能

1) 一维：$\vec{F}=-\frac{du}{dx}$　三维：$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=(-\frac{\partial u}{\partial x},-\frac{\partial u}{\partial y},-\frac{\partial u}{\partial z})$

（求偏导(只对x求导)，y, z视为常数；对y求导；对z求导）

Stable Equilibrium：$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_0}>0$　Unstable Equilibrium：$\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_0}<0$





2) 简谐运动　公式必须相对平衡点列

$x=A\sin(\omega x+\varphi)$，于弹簧振子而言：$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_{tot}}}$，$E=\frac{1}{2}kA^2$，$a=-\frac{k}{m_{tot}}x=-\omega^2x$

*叠放振子（分离问题）：上物体放在下物体上，下物体与弹簧相连，在分离前做简谐运动

临界条件：$N_{支}=0$；加速度相同

*变质量弹簧振子：在极短时间内突然放上/取下物体

特征：在突变一瞬间，$\Delta p=\int_0^{\Delta t}F dt^{(\Delta t\to 0)}=0$，动量守恒

$m_1v=(m_1+m_2)u$放　$/(m_1+m_2)v=m_1u$取

$x=A_0\sin(\omega_0 t+\varphi)\longrightarrow x=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi)$

A_1：能量守恒：$\frac{1}{2}kx_{current}^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2=\frac{1}{2}kA_1^2$

ω_1：$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m_{tot}}}$

φ_1：代入一个点。

3) 保守力：力的做功只与初末位置有关，需要证明对任意路径成立，特路径仅供证明

七、动量定理

$\int_{t_1}^{t_f}\vec{F}_{ext}dt=\Delta\vec{p}$，if $\vec{F}_{ext}=0\Rightarrow\vec{p}_1=\vec{p}_f=\sum m_i\vec{v}_i$

Remark：矢量式，可应用在单轴上与质心结合

八、质心

1) $\vec{R}_{cm}=\frac{\sum m_i\vec{R}_i}{\sum m_i}=\vec{R}_{o.c}+\int_0^t V_{cm}dt$

$\vec{V}_{cm}=\dot{\vec{R}}_{cm}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}=\frac{\vec{F}_{tot}}{m_{tot}}=\vec{v}_{o.cm}+\int_0^t\vec{a}_{cm}dt$；$K_{平动tot}=\frac{1}{2}M_{tot}(V_{cm})^2$

$\vec{P}_{tot}=M_{tot}\cdot\vec{V}_{cm}$

$\vec{a}_{cm}=\frac{\sum\vec{F}_{ext}}{m_{tot}}$

2) 如果动量守恒$\longrightarrow\vec{V}_{cm}=$ const.

特别地，如果$P_i=P_f=0\longrightarrow\vec{V}_{cm}=0\longrightarrow\vec{x}_{cm}=$const.$=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m}=\frac{\sum m_i x_f}{\sum m}$　e.g. 车上摆绳，角上走路

3) 如果加速度恒定，$\vec{a}_{cm}=$const.

$\vec{V}_{cm}=\vec{V}_{cm,0}+\int_0^t\vec{a}_{cm}dt$　e.g. 物体在匀加速场中，$a_{cm}=-g\hat{y}$，求某一部分速度，选择部分运动最高点时其$v=0$

4) 弹性碰撞（m_1碰m_2）：

$v_{1f}=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}$，$v_{2f}=\frac{2m_1v_1+(m_2-m_1)v_2}{m_1+m_2}$

5) 若一个物体可以自由转动（合力为零+合外力矩为0），则此物体绕轴为质心