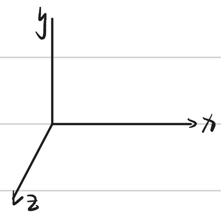
一、向量积

1) 点乘 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|a||b|\cos\alpha=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ = 标量，α = $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角

$\cos\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a||b|}$

2) 叉乘 $\vec{a}\times\vec{b}=|a||b|\sin\alpha$ = 矢量 方向：右手定则，从$\vec{a}$握到$\vec{b}$，右手拇指指向为$\vec{c}$方向

Remark：选定x轴方向后，一般用右手定则确定y、z轴正方向，此时有：



$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$

$\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$

$\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$

$\overset{\text{带负号}}{\longleftarrow}$
$xyzxyz$
$\longrightarrow$

二、极坐标下的圆周运动

1) $w=\frac{d\theta}{dt}$，$\theta(t)=\theta_0+\int w\,dt$

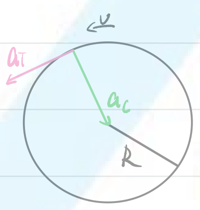
$\alpha=\frac{dw}{dt}$，$w(t)=w_0+\int\alpha\,dt$

若α恒定，则有

$w(t)=w_0+\alpha t$

$\theta(t)=\theta_0+w_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

2) $S=\theta R\xrightarrow{\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(\theta R)}V=\text{Linear velocity}=wR\xrightarrow{\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(wR)}a_T=\text{tangential acceleration}=\alpha R$



Remark：弧度制无单位，角度制有

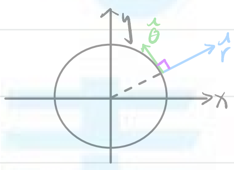
E.g、$\sin(Ct)$，$C=6s^{-1}\Rightarrow Ct$无单位$\Rightarrow$弧度制角

$\sin(16.5°)\cdot t\Rightarrow$单位$=$"°"$\Rightarrow$角度制角

三、极坐标和单位向量

1) $\hat{r}=\cos\theta(t)\hat{x}+\sin\theta(t)\hat{y}$

$\hat{\theta}=-\sin\theta(t)\hat{x}+\cos\theta(t)\hat{y}$



$\hat{r}\perp\hat{\theta}$

2) $\vec{v}=\underbrace{\dot{r}\hat{r}}_{\text{radial velocity}}+\underbrace{r\dot{\theta}\hat{\theta}}_{\text{tangential velocity}}$

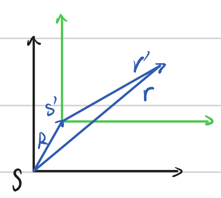
$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

$-r\dot{\theta}^2\hat{r}$ = centripital acceleration

$r\ddot{\theta}\hat{\theta}$ = tangential acceleration

$\ddot{r}\hat{r}$ = radial acceleration = changes the radial velocity $\dot{r}\hat{r}$

四、惯性系和非惯性系



$\vec{r}=\vec{R}+\vec{r}'\xrightarrow{\text{Derivative}}\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}'\xrightarrow{\text{Derivative}}\vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{a}'$

$\longrightarrow\vec{F}_{(s)}=m\frac{d\vec{u}}{dt}+\vec{F}_{(s')}$；Denote $F_{Fict}=-m\frac{du}{dt}$

1) 简单题靠想象

2) 难题：Step 1: Draw a table　Step 2: Find the easiest solution　Step 3: Do the transformation

五、功、非保守力

1) 一阶导型：

$f'(x)=-\alpha f(x)\longrightarrow f(x)=Ae^{-\alpha t}$

$f'(x)=-\alpha f(x)+\beta\longrightarrow f(x)=Ae^{-\alpha t}+\frac{\beta}{\alpha}$

2) 二阶导型

$f''(x)=-\alpha f(x)\longrightarrow f(x)=A\sin(wt+\varphi)$，$w=\sqrt{\alpha}$ $(=\sqrt{\frac{k}{m}})$ 在弹簧振子中

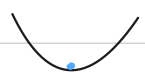
3) 二次型：$-bv^2=ma=m\frac{dv}{dt}$，v、t分别放两侧，再分别积分

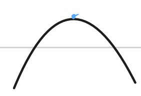
4) $W=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}\vec{F}d\vec{l}=\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b}(F_xdx+F_ydy+F_zdz)$

六、保守力和势能

1) 一维：$\vec{F}=-\frac{du}{dx}$　三维：$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=(\underset{\substack{\text{求偏导(只对x求导)}\\ \text{y、z视为常数}}}{-\frac{\partial u}{\partial x}},\underset{\text{只对y求导}}{-\frac{\partial u}{\partial y}},\underset{\text{只对z求导}}{-\frac{\partial u}{\partial z}})$

Stable Equilibrium: $\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_0}>0$　Unstable Equilibrium: $\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_{x=x_0}<0$





2) 简谐运动 公式必须相对平衡点列

$x=A\sin(wx+\varphi)$，对弹簧振子而言：$w=\sqrt{\frac{k}{m_{TOT}}}$，$E=\frac{1}{2}kA^2$；$a=-\frac{k}{m_{TOT}}x=-w^2x$

*叠放振子（分离问题）：上物体放在下物体上，下物体与弹簧相连，在分离前做简谐运动

临界条件：$N_{压}=0$；加速度相同

*变质量弹簧振子：在极短时间内突然放上/取下物体

特征：在突变一瞬间，$\Delta p=\int_0^{\Delta t}Fdt\overset{(\Delta t\to 0)}{=}0$，动量守恒

$m_1v=(m_1+m_2)u$ 放　/ $(m_1+m_2)v=m_1u$ 取

$x=A_0\sin(w_0t+\varphi)\longrightarrow x=A_1\sin(w_1t+\varphi)$

A_1：能量守恒：$\frac{1}{2}kx_{current}^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2=\frac{1}{2}kA_1^2$

w_1：$w_1=\sqrt{\frac{k}{m_{TOT}}}$

φ_1：代入一个点

3) 保守力："力的做功只与初末位置有关" 需要证明对任意路径成立，一条路径不足以证明

七、动量定理

$\int_{ti}^{tf}\vec{F}_{ext}dt=\Delta\vec{p}$，If $\vec{F}_{ext}=0\Rightarrow\vec{p_i}=\vec{p_f}=\sum m_i\vec{v_i}$

Remark：矢量式，可应用在单轴上 (与质心结合

八、质心

1) $\vec{R}_{cm}=\frac{\sum m_i\vec{R_i}}{\sum m_i}=\vec{R}_{0,c}+\int_0^t V_{cm}dt$

$\vec{V}_{cm}=\dot{\vec{R}}_{cm}=\frac{\sum m_i\vec{v_i}}{\sum m_i}=\frac{\vec{P}_{TOT}}{m_{TOT}}=\vec{V}_{0,cm}+\int_0^t\vec{a}_{cm}dt$；$K_{平动TOT}=\frac{1}{2}M_{TOT}(V_{cm})^2$

$\vec{P}_{TOT}=M_{TOT}\cdot\vec{V}_{cm}$

$\vec{a}_{cm}=\frac{\sum\vec{F}_{ext}}{m_{TOT}}$

2) 如果动量守恒 $\longrightarrow\vec{V}_{cm}=const.$

特别地，如果 $P_i=P_f=0\longrightarrow\vec{V}_{cm}=0\longrightarrow\vec{x}_{cm}=const.=\frac{\sum mx_i}{\sum m}=\frac{\sum mx_f}{\sum m}$　eg、车上摆绳；船上走路

3) 如果加速度恒定，$\vec{a}_{cm}=const.$

$\vec{V}_{cm}=\vec{V}_{cm,0}+\int_0^t\vec{a}_{cm}dt$　eg、物体在空中爆炸，$a_{cm}=-g\hat{y}$，求某一部分速度，或某部分达到最高点时其$V=0$

4) 弹性碰撞 (m_1碰m_2)：

$V_{1f}=\frac{(m_1-m_2)V_1+2m_2V_2}{m_1+m_2}$，$V_{2f}=\frac{2m_1V_1+(m_2-m_1)V_2}{m_1+m_2}$

5) 若一个物体可以自由转动（合力为零+合外力矩为0），那么物体转轴为质心