

Lecture11_CN

第十一讲：线性微分方程组（矩阵方法）

知识总结

概念	关键公式 / 方法
标准型	$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
互异实特征值	$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{\lambda_n t}$
重特征值（亏损）	$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{\lambda t} + c_2 (\boldsymbol{\xi}_1 t + \boldsymbol{\xi}_2) e^{\lambda t}$, 其中 $(A - \lambda I)\boldsymbol{\xi}_2 = \boldsymbol{\xi}_1$
共轭复特征值	$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \sin \beta t + \mathbf{b} \cos \beta t)$
基解矩阵	$\Phi(t) = [\boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{\lambda_n t}]$
非齐次方程组	$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, 常数变易法: $\mathbf{x}_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \mathbf{g}(t) dt$

1. 标准形式与解的结构

常系数线性微分方程组可以写成：

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ （或 $\mathbb{C}^n$ ）是未知向量函数， A 是 $n \times n$ 常系数矩阵。

叠加原理

若 $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ 是 A 的特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则：

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

构成通解。

基解矩阵

基解矩阵 $\Phi(t)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵，其列向量是线性无关的解：

$$\Phi(t) = [\boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)} e^{\lambda_n t}]$$

通解可简洁地写为 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$ ，其中 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ 。