

Lecture10_CN

第十讲：拉普拉斯变换

知识总结

概念	关键公式 / 方法
拉普拉斯变换定义	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$
线性性质	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
导数性质	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
第一移位定理	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$
第二移位定理	$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t - c)\} = e^{-cs}F(s)$
卷积	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$, 其中 $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$
求解初值问题	对 ODE 做变换 $\rightarrow$ 解出 $Y(s) \rightarrow$ 逆变换得 $y(t)$
狄拉克 δ 函数	$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$, 用于建模脉冲输入

1. 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换将时间函数 $f(t)$ 转化为复变量 s 的函数：

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

其中 $s > \alpha$ ，要求函数具有指数阶 α （即存在 M, α 使得 $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ）。

① 为什么使用拉普拉斯变换？

拉普拉斯变换是求解初值问题（IVP）的强大工具，特别适用于带有间断强迫函数或脉冲输入的问题。它将微分方程转化为代数方程，自动包含初始条件，并能优雅地处理分段定义的强迫项。

Laplace transform

Definition

The Laplace transform of a function f , which will be denoted by $\mathcal{L}\{f\}$ or by $F(s)$, will be defined as

$$\mathcal{L}\{f\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

whenever the improper integral converges.

Martín Mansilla

Spring 2026

指数阶

函数 $f(t)$ 被称为具有**指数阶** α ，如果存在常数 $M > 0$ 和 $T > 0$ 使得：

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{对所有 } t \geq T$$

ODE 中常见的大多数函数（多项式、指数函数、正弦/余弦函数及其乘积）都满足此条件。

⚠ 存在条件

如果 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上**分段连续**且具有**指数阶**，则拉普拉斯变换存在。分段连续意味着 f 在任何有限区间上至多有有限个跳跃间断点。

Theorem (Theorem 6.1.2)

Suppose that

- i. f is piecewise continuous on the interval $0 \leq t \leq b$ for any positive b and
- ii. there exists real constants K , a , and M with K and M positive such that

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \quad \text{when } t \geq M.$$

Then the Laplace transform $F(s)$ as defined before exists for $s > a$.

Martín Mansilla

Spring 2026

2. 基本拉普拉斯变换

2.1 常见变换表

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	定义域
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n ($n = 1, 2, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$s > a$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$s > b $
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$s > b $

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	定义域
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$t^n e^{at} \quad (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$\delta(t-c)$ (狄拉克 δ 函数)	e^{-cs}	—

表的推导

所有条目都来自对定义的直接积分。例如：

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

Common Laplace Transforms

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n$ a positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
8. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $
9. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}, \quad n$ a positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$

Martín Mansilla

Spring 2026

例题 1：从定义计算拉普拉斯变换

问题：使用定义求 $\mathcal{L}\{t\}$ 。

解:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

步骤 1: 分部积分。令 $u = t$, $dv = e^{-st}dt$, 则 $du = dt$, $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ 。

$$\int_0^{\infty} te^{-st} dt = \left[-\frac{t}{s}e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st} dt$$

步骤 2: 计算边界项。当 $s > 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{t}{s}e^{-st} = 0$, 在 $t = 0$ 处该项为 0。

$$= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}}$$

例题 2: 从定义计算 (三角函数)

问题: 使用定义求 $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}$ 。

解:

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(bt) dt$$

步骤 1: 两次分部积分, 或直接使用公式:

$$\int e^{-st} \sin(bt) dt = \frac{e^{-st}(-s \sin(bt) - b \cos(bt))}{s^2 + b^2}$$

步骤 2: 计算反常积分:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \sin(bt) dt = \left[\frac{e^{-st}(-s \sin(bt) - b \cos(bt))}{s^2 + b^2} \right]_0^{\infty}$$

当 $t \rightarrow \infty$ ($s > 0$) 时, $e^{-st} \rightarrow 0$ 。在 $t = 0$ 处:

$$= 0 - \frac{1 \cdot (0 - b)}{s^2 + b^2} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}}$$

3. 拉普拉斯变换的性质

3.1 线性性质