Lecture10_CN

第十讲：拉普拉斯变换

知识总结

概念	关键公式 / 方法
拉普拉斯变换定义	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$
线性性质	$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s)$
导数性质	$\mathcal{L}\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$，$\mathcal{L}\{f''(t)\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
第一移位定理	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$
第二移位定理	$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)$
卷积	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}=F(s)G(s)$，其中 $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$
求解初值问题	对 ODE 做变换 $\to$ 解出 $Y(s)$ $\to$ 逆变换得 $y(t)$
狄拉克 δ 函数	$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=e^{-st_0}$，用于建模脉冲输入

1. 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换将时间函数 $f(t)$ 转化为复变量 s 的函数：

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

其中 $s>\alpha$，要求函数具有指数阶 α（即存在 M,α 使得 $|f(t)|\le Me^{\alpha t}$）。

> **为什么使用拉普拉斯变换?**
>
> 拉普拉斯变换是求解**初值问题**（IVP）的强大工具，特别适用于带有**间断强迫函数**或**脉冲输入**的问题。它将微分方程转化为代数方程，自动包含初始条件，并能优雅地处理分段定义的强迫项。

Laplace transform

Definition

The Laplace transform of a function f, which will be denoted by $\mathcal{L}\{f\}$ or by $F(s)$, will be defined as

$$\mathcal{L}\{f\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

whenever the improper integral converges.

Martín Mansilla Spring 2026

指数阶

函数 $f(t)$ 被称为具有**指数阶** α，如果存在常数 $M > 0$ 和 $T > 0$ 使得：

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad \text{对所有} \quad t \geq T$$

ODE 中常见的大多数函数（多项式、指数函数、正弦/余弦函数及其乘积）都满足此条件。

⚠ 存在条件

如果 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上**分段连续**且具有**指数阶**，则拉普拉斯变换存在。分段连续意味着 f 在任何有限区间上至多有有限个跳跃间断点。

Theorem (Theorem 6.1.2)

Suppose that

i. *f is piecewise continuous on the interval $0 \leq t \leq b$ for any positive b and*

ii. *there exists real constants K, a, and M with K and M positive such that*

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, \qquad \text{when } t \geq M.$$

Then the Laplace transform $F(s)$ as defined before exists for $s > a$.

Martín Mansilla Spring 2026

2. 基本拉普拉斯变换

2.1 常见变换表

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	定义域
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	$s > \lvert b\rvert$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}$	$s > \lvert b\rvert$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	定义域
$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$s > a$
$t^n e^{at}\ \ (n=1,2,\ldots)$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
$u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}$	$s > 0$
$\delta(t-c)$（狄拉克 δ 函数）	e^{-cs}	—

表的推导

所有条目都来自对定义的直接积分。例如：

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \frac{1}{s-a}$$

Common Laplace Transforms

TABLE 6.2.1 Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. t^n, n a positive integer	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
6. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
7. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
8. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$
9. $e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
10. $e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
11. $t^n e^{at}$, n a positive integer	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$

Martín Mansilla　　Spring 2026

例题 1：从定义计算拉普拉斯变换

问题： 使用定义求 $\mathcal{L}\{t\}$。

解：

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt$$

步骤 1： 分部积分。令 $u = t$，$dv = e^{-st}dt$，则 $du = dt$，$v = -\frac{1}{s}e^{-st}$。

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\,dt$$

步骤 2： 计算边界项。当 $s > 0$ 时，$\lim_{t\to\infty} -\frac{t}{s}e^{-st} = 0$，在 $t = 0$ 处该项为 0。

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}}$$

例题 2：从定义计算（三角函数）

问题： 使用定义求 $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}$。

解：

$$\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin(bt)\,dt$$

步骤 1： 两次分部积分，或直接使用公式：

$$\int e^{-st}\sin(bt)\,dt = \frac{e^{-st}(-s\sin(bt) - b\cos(bt))}{s^2 + b^2}$$

步骤 2： 计算反常积分：

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(bt)\,dt = \left[\frac{e^{-st}(-s\sin(bt) - b\cos(bt))}{s^2 + b^2}\right]_0^\infty$$

当 $t \to \infty$（$s > 0$）时，$e^{-st} \to 0$。在 $t = 0$ 处：

$$= 0 - \frac{1\cdot(0 - b)}{s^2 + b^2} = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sin(bt)\} = \frac{b}{s^2 + b^2}}$$

---

3. 拉普拉斯变换的性质

3.1 线性性质