Lecture9_CN

第9讲：二阶线性方程的级数解

内容概要

概念	关键公式 / 方法		
幂级数	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，中心在 x_0		
比值审敛法	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1 \implies$ 收敛		
收敛半径	$R = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert$（若极限存在）		
级数解法	假设 $y = \sum a_n x^n$，代入ODE，令系数相等		
递推关系	利用ODE将 a_{n+2} 用 a_n（或 a_{n+1}）表示		

---

1. 幂级数

幂级数是以 x_0 为中心的无穷级数，形式如下：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

幂级数是求解无法用初等方法求解的微分方程的基本工具。它允许我们将解表示为无穷级数，并通过截断来获得近似解。

Series

We want to use power series to find solutions to differential equations.

Definition

Consider a power series around a point x_0, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

a. We say that the series *converges at a point* x if the limit

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$$

exists.

b. We say that the series *converges absolutely at a point* x if the limit

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} |a_n||x-x_0|^n$$

exists.

Martín Mansilla

Spring 2026

> **说明：** 幂级数是形如 $a_n(x-x_0)^n$ 各项的无穷和，其中 a_n 是系数，x_0 是中心。该级数在以 x_0 为中心的某个区间内收敛，这个区间称为收敛区间。幂级数可以进行加、减、乘运算，并且在其收敛半径内可以逐项微分和积分。

---

2. 比值审敛法

比值审敛法是判断幂级数是否收敛的工具。对于级数 $\sum b_n$：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = L \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} L<1 & \text{级数绝对收敛} \\ L>1 & \text{级数发散} \\ L=1 & \text{审敛法失效} \end{cases}$$

The ratio test

One powerful tool that we have to test absolutely convergence of a power series is the ratio test.

Theorem

Consider a series $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *with* $b_n \neq 0$ *for all* n. *If*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = L$$

then:

i. *If* $L < 1$ *the series converges absolutely.*

ii. *If* $L > 1$ *the series diverges.*

NOTE: The ratio test is inconclusive if $L = 1$.

Martín Mansilla Spring 2026

说明： 比值审敛法比较相邻项的大小。如果比值趋于极限 $L < 1$，则各项最终缩小得足够快，级数收敛。如果 $L > 1$，则各项增长，级数发散。将比值审敛法应用于幂级数时，可以得到**收敛半径**。

EXAMPLE 1 For which values of x does the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

converge absolutely?

说明： 将比值审敛法应用于幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 时，我们将 $|x-x_0|$ 视为常数，计算 $L = |x-x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$。条件 $L < 1$ 给出 $|x-x_0| < R$，其中 R 是收敛半径。在端点 $x = x_0 \pm R$ 处，级数可能收敛或发散，需单独检验。

比值审敛法速记

对于幂级数 $\sum a_n x^n$，比值审敛法简化为：